Библиографический список

I. Л о б р и К. Динамические полиситемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Математика. М., 1979. Вып. I4. С.I34-I73.

2. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, I973. I88 с.

УДК 5I4.75

О СВЯЗИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КОМПЛЕКСОВ С КОМПЛЕКСАМИ КОНИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н.В.А м и ш е в а

(Кемеровский государственный университет)

В аффинном пространстве рассматривается линейчатый комплекс и находится ассоциированный с ним комплекс коник. Устанавливается связь между этими комплексами.

§ I. Канонизация репера линейчатого комплекса.

Деривационные формулы произвольного репера $\{\bar{r},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ аффинного пространства имеют вид:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i \quad , \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j \, ,$$

причем удовлетворяются уравнения структуры:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i \quad , \quad d\,\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k .$$

Если начало A репера поместить на луч линейчатого комплекса, вектор $\bar{e}_3$ направить по лучу, а вектор $\bar{e}_2$-параллельно касательной плоскости цилиндра комплекса, то дифференциальные уравнения линейчатого комплекса примут вид:

$$\omega^1 = \beta\, \omega_3^1 + \gamma\, \omega_3^2 , \tag{I}$$

$$\omega_2^1 = \lambda_{21}^1 \omega^2 + \lambda_{22}^1 \omega_3^1 + \lambda_{23}^1 \omega_3^2 . \tag{2}$$

На луче комплекса имеется инвариантная точка - центр луча, т.е. собственная точка прикосновения основного цилиндроида [I] . Основным цилиндроидом называют цилиндроид, направляющая плоскость которого параллельна касательной плоскости цилиндра комплекса. В выбранном репере основной цилиндроид определяется уравнениями:

$$\omega_3^1 = 0 \quad , \quad \omega_2^1 = 0 , \tag{3}$$

а радиус-вектор центра луча комплекса имеет вид:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \frac{\lambda_{23}^1 + \lambda_{21}^1 \beta}{\lambda_{21}^1 (1-\beta)}\, \bar{e}_3 , \tag{4}$$

где O - начало неподвижной системы координат и $\overline{OA} = \bar{r}$.

Если начало репера совместить с центром луча комплекса, то будем иметь:

$$\lambda_{23}^1 = -\lambda_{21}^1 \beta , \tag{5}$$

$$\lambda_{21}^1 \neq 0 . \tag{6}$$

Форма ω^3 становится главной:

$$\omega^3 = \lambda_{01}^3 \omega^2 + \lambda_{02}^3 \omega_3^1 + \lambda_{03}^3 \omega_3^2 . \tag{7}$$

Аффинный центр луча (точка A) и касательная плоскость к цилиндру комплекса $L_2 = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ задают неголономную поверхность $\widetilde{V}$, аффинная нормаль которой в построенном репере параллельна вектору $\gamma\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2 + (\lambda_{03}^3 + \beta\lambda_{01}^3)\bar{e}_3$. Направив вектор $\bar{e}_1$ параллельно аффинной нормали, получим соотношения:

$$\beta = 0 , \quad \lambda_{03}^3 = 0 , \quad \gamma \neq 0 . \tag{8}$$

При этом условия (5) примут вид:

$$\lambda_{23}^1 = 0 . \tag{9}$$

При фиксации вектора $\bar{e}_1$ формы ω_1^2 и ω_1^3 стали главными. Их разложение по базисным запишем в виде:

$$\omega_1^2 = \lambda_{11}^2 \omega^2 + \lambda_{12}^2 \omega_3^1 + \lambda_{13}^2 \omega_3^2 \quad , \quad \omega_1^3 = \lambda_{11}^3 \omega^2 + \lambda_{12}^3 \omega_3^1 + \lambda_{13}^3 \omega_3^2 . \tag{I0}$$

С учетом соотношений (8) уравнение (I) принимает вид:

$$\omega^1 = \gamma\, \omega_3^2 . \tag{II}$$

Замыкание уравнения (II) приводит к следующему квадратичному уравнению:

$$\{d\gamma + \gamma\lambda_{13}^2 \omega_3^1 + \gamma(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_1^1)\} \wedge \omega_3^2 + (\lambda_{22}^1 + \lambda_{01}^3 + \gamma\lambda_{11}^2)\, \omega_3^1 \wedge \omega^2 = 0,$$

откуда следует конечное соотношение

$$\lambda_{22}^{1} + \lambda_{01}^{3} + \gamma\,\lambda_{11}^{2} = 0 \tag{I2}$$

и уравнение Пфаффа:

$$d\gamma + \gamma\,\lambda_{13}^{2}\,\omega_{3}^{1} + \gamma\,(\omega_{3}^{3} - \omega_{2}^{2} + \omega_{1}^{1}) = \xi\,\omega_{3}^{2} \tag{I3}$$

Замыкание уравнений (2), (7), (I0) и (I3) приводит к следующей системе квадратичных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\{d\lambda_{21}^{1} + \lambda_{21}^{1}(\omega_{1}^{1} - 2\omega_{2}^{2}) + (\lambda_{21}^{1}\lambda_{11}^{2}\gamma - \lambda_{21}^{1}\lambda_{01}^{3} + \lambda_{22}^{1}\lambda_{21}^{1})\,\omega_{3}^{2}\} \wedge \omega^{2} + \\
&+\{d\lambda_{22}^{1} + \lambda_{22}^{1}(\omega_{3}^{3} - \omega_{2}^{2}) + (\lambda_{21}^{1}\lambda_{12}^{2}\gamma - \lambda_{21}^{1}\lambda_{02}^{3} + \lambda_{22}^{1}\lambda_{22}^{1} - 1)\,\omega_{3}^{2}\} \wedge \omega_{3}^{1} = 0, \\
&\{d\lambda_{01}^{3} + (1 - \gamma\lambda_{11}^{3} + \lambda_{02}^{3}\lambda_{21}^{1})\,\omega_{3}^{2} + \lambda_{01}^{3}(\omega_{3}^{3} + \gamma\lambda_{11}^{2}\omega_{3}^{2} - \omega^{2} - \lambda_{01}^{3}\omega_{3}^{2})\} \wedge \omega^{2} + \\
&+\{d\lambda_{02}^{3} + (\lambda_{01}^{3}\gamma - \gamma\lambda_{12}^{3} - \lambda_{01}^{3}\lambda_{02}^{3} + \lambda_{02}^{3}\lambda_{22}^{1})\,\omega_{3}^{2} + \lambda_{02}^{3}(2\omega_{3}^{3} - \omega_{1}^{1})\} \wedge \omega_{3}^{1} = 0, \\
&\{d\lambda_{11}^{2} - \lambda_{11}^{2}\omega_{1}^{1} + (\lambda_{11}^{3} + \lambda_{11}^{2}\lambda_{11}^{2}\gamma - \lambda_{11}^{2}\lambda_{01}^{3} + \lambda_{12}^{2}\lambda_{21}^{1})\,\omega_{3}^{2} + \lambda_{13}^{2}\lambda_{11}^{2}\omega_{3}^{1}\} \wedge \omega^{2} + \\
&+\{d\lambda_{12}^{2} + \lambda_{12}^{2}(\omega_{2}^{2} + \omega_{3}^{3} - 2\omega_{1}^{1}) + (\lambda_{12}^{3} + \lambda_{11}^{2}\lambda_{12}^{2}\gamma - \lambda_{02}^{3}\lambda_{11}^{2} + \lambda_{12}^{2}\lambda_{22}^{1} - \\
&-\lambda_{13}^{2}\lambda_{13}^{2})\,\omega_{3}^{2}\} \wedge \omega_{3}^{1} + \{d\lambda_{13}^{2} + \lambda_{13}^{2}(\omega_{3}^{3} - 2\omega_{2}^{2} - \omega_{1}^{1})\} \wedge \omega_{3}^{2} = 0, \\
&\{d\lambda_{11}^{3} + \lambda_{11}^{3}(\omega_{3}^{3} - \omega_{1}^{1} - \omega_{2}^{2}) + \lambda_{11}^{2}\omega_{2}^{3} + (\lambda_{11}^{3}\lambda_{11}^{2}\gamma - \lambda_{11}^{3}\lambda_{01}^{3})\,\omega_{3}^{2} + \lambda_{13}^{3}\lambda_{11}^{2}\omega_{3}^{1}\} \wedge \omega^{2} + \\
&+\{d\lambda_{12}^{3} + 2\lambda_{12}^{3}(\omega_{3}^{3} - \omega_{1}^{1}) + \lambda_{12}^{2}\omega_{2}^{3} + (\lambda_{11}^{3}\lambda_{12}^{2}\gamma - \lambda_{11}^{3}\lambda_{02}^{3} - \lambda_{13}^{3}\lambda_{13}^{2})\,\omega_{3}^{2}\} \wedge \omega_{3}^{1} + \\
&+\{d\lambda_{13}^{3} + \lambda_{13}^{3}(2\omega_{3}^{3} - \omega_{2}^{2} - \omega_{1}^{1}) - \lambda_{12}^{3}\omega_{2}^{1}\} \wedge \omega_{3}^{2} = 0, \\
&\{d\xi + \xi(2\omega_{3}^{3} - 2\omega_{2}^{2} + \omega_{1}^{1}) + 2\xi\lambda_{13}^{2}\omega_{3}^{1} + 2\gamma\lambda_{13}^{2}\omega_{2}^{1} + 2\gamma\omega_{2}^{3}\} \wedge \omega_{3}^{2} + \\
&+\{-\gamma\,d\lambda_{13}^{2} + 2\lambda_{12}^{2}\omega_{2}^{1} + (\gamma\lambda_{13}^{3} - \gamma\lambda_{12}^{3} - \xi\lambda_{11}^{2} - 2\gamma\lambda_{11}^{2}\lambda_{22}^{1})\,\omega^{2}\} \wedge \omega_{3}^{1} = 0
\end{aligned} \tag{I4}$$

§ 2. Комплекс коник, ассоциированный с линейчатым комплексом

С каждой неголономной поверхностью ассоциируется конус Малюса, который является геометрическим местом касательных к линиям, при движении вдоль которых аффинная нормаль описывает торс [2]. Для неголономной поверхности $\widetilde{V}$, определяемой точкой A и плоскостью $L_2 = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, конус Малюса в построенном репере

находится из равенства $(\bar{e}_1, d\bar{A}, d\bar{e}_1) = 0$ при условии $\frac{\omega^1}{x^1} = \frac{\omega^2}{x^2} = \frac{\omega^3}{x^3}$, что дает следующее уравнение:

$$a_{22}(x^2)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{33}(x^3)^2 = 0, \tag{I5}$$

где

$$\begin{cases} a_{22} = \lambda_{11}^{3} - \dfrac{\lambda_{12}^{3}\lambda_{01}^{3}}{\lambda_{02}^{3}}, \quad a_{33} = -\dfrac{\lambda_{12}^{2}}{\lambda_{02}^{3}}, \quad 2a_{12} = \dfrac{\lambda_{13}^{3}}{\gamma}, \\ 2a_{13} = \dfrac{\lambda_{13}^{3}}{\gamma}, \quad 2a_{23} = \dfrac{\lambda_{12}^{3}}{\lambda_{02}^{3}} - \lambda_{11}^{2} + \lambda_{01}^{3}\dfrac{\lambda_{12}^{2}}{\lambda_{02}^{3}}. \end{cases} \tag{I6}$$

Если $a_{22}a_{33} - a_{23}^2 \neq 0$, то в сечении конуса Малюса плоскостью $x^1 = k$ будет центральная коника, центр которой обозначим C . Цилиндр, направляющей линией которого является пересечение конуса Малюса с плоскостью $x^1 = k$, а образующие параллельны вектору $\overline{AC}$, пересекает касательную плоскость цилиндра линейчатого комплекса по кривой Q :

$$a_{22}(x^2)^2 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{33}(x^3)^2 = a_{00}, \quad x^1 = 0, \tag{I7}$$

где

$$a_{00} = \frac{k(a_{33}a_{12}^2 + a_{22}a_{13}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23})}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}.$$

Так как в касательной плоскости цилиндра линейчатого комплекса, проходящего через луч комплекса, имеется коника, то мы имеем комплекс коник, ассоциированный с линейчатым комплексом. В каждой плоскости комплекса коник (в нашем случае - касательной плоскости цилиндра линейчатого комплекса) имеются инвариантные прямые - основные прямые [3] . Прямая ℓ является основной, если эта прямая сопряжена относительно коники Q касательной к кривой, вдоль которой прямая ℓ переносится параллельно плоскости коники. Основные прямые в данном случае определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} x^1 = 0, \\ \{a_{23}(\lambda_{21}^{1}\lambda_{02}^{3} - \lambda_{01}^{3}\lambda_{22}^{1}) - \lambda_{22}^{1}a_{22}\}(x^2)^2 - (a_{23} - a_{33}\lambda_{01}^{3})(x^3)^2 + \\ + \{a_{33}(\lambda_{21}^{1}\lambda_{02}^{3} - \lambda_{01}^{3}\lambda_{22}^{1}) - a_{23}(\lambda_{22}^{1} + \lambda_{01}^{3}) - a_{22}\}x^2x^3 = 0, \end{gathered}$$

где a_{22} , a_{23} , a_{33} определены формулами (I6).

Направив вектор $\bar{e}_2$ по сопряженному направлению к направлению вектора $\bar{e}_3$ относительно кривой Q , будем иметь:

$$a_{23} = \frac{\lambda^3_{12} - \lambda^3_{02}\lambda^2_{11} + \lambda^3_{01}\lambda^2_{12}}{2\lambda^3_{02}} = 0. \qquad (18)$$

Форма ω^3_2 становится главной. Ее разложение по базисным запишем в виде:

$$\omega^3_2 = \lambda^3_{21}\omega^2 + \lambda^3_{22}\omega^1_3 + \lambda^3_{23}\omega^2_3. \qquad (19)$$

Обозначим

$$\bar{m} = \lambda^2_{12}\bar{e}_2 + \lambda^3_{12}\bar{e}_3. \qquad (20)$$

Так как $\delta\bar{m} = (2\pi^1_1 - \pi^3_3)\bar{m}$, то вектор $\bar{m}$ относительный инвариант. Геометрическая характеристика этого вектора заключается в следующем: вектор $\bar{m}$ параллелен вектору

$$[d\bar{e}_1 - \omega^1_1\bar{e}_1]_{\omega^2 = \omega^2_3 = 0}.$$

Дифференциальное уравнение $\omega^2 = 0$ определяет неголономную поверхность V, описываемую точкой A (центром луча линейчатого комплекса) с касательной плоскостью $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}$. Аффинная нормаль этой поверхности определяется вектором

$$\bar{a} = \lambda^2_{12}\bar{e}_2 + (\lambda^3_{01}\lambda^2_{12} - \lambda^3_{02}\lambda^2_{11})\bar{e}_3 \qquad (21)$$

и является касательной к линии Γ_2, заданной системой уравнений

$$\omega^2_3 = 0, \qquad \omega^1_3 = -\frac{\lambda^2_{11}}{\lambda^2_{12}}\omega^2. \qquad (22)$$

Т е о р е м а I. Сумма векторов $\bar{m}$ и $\bar{a}$ определяет направление, сопряженное лучу комплекса относительно коники Q; разность $\bar{m} - \bar{a}$ параллельна лучу комплекса.

Утверждение теоремы вытекает из формул (I8), (20) и (2I).

Т е о р е м а 2. Луч линейчатого комплекса является основной прямой комплекса коник тогда и только тогда, когда вектор $\bar{m}$ является касательным к линии Γ_1, сопряженной с линией Γ на неголономной поверхности $\widetilde{V}$ ($\widetilde{V}$ определяется точкой A и касательной плоскостью $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как касательная к линии Γ_1 параллельна вектору

$$\bar{a}_1 = \lambda^2_{12}\bar{e}_2 + (\lambda^3_{01}\lambda^2_{12} + \lambda^3_{02}\lambda^2_{11})\bar{e}_3,$$

то условие параллельности векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{m}$ имеет вид:

$$\lambda^3_{12} - \lambda^3_{01}\lambda^2_{12} - \lambda^3_{02}\lambda^2_{11} = 0. \qquad (23)$$

Так как коэффициент при $(x^3)^2$ в уравнениях (I7), определяющих основные прямые, равен

$$-a_{23} - a_{33}\lambda^3_{01} = -\frac{\lambda^3_{12} - \lambda^2_{11}\lambda^3_{02} - \lambda^2_{12}\lambda^3_{01}}{\lambda^3_{02}},$$

то утверждение теоремы вытекает из равенства (23).

Обычным способом из системы квадратичных уравнений (I4) находим, что произвол существования данного класса две функции трех аргументов.

Библиографический список

I. Щ е р б а к о в Р.Н. Основной цилиндроид линейчатого комплекса // Математика. Известия вузов. I962. № 3. С.I77-I88.

2. Щ е р б а к о в Р.Н., Р а х у л а М.О. К эквиаффинной теории неголономного многообразия // Геометр. сб. / Томский ун-т. Томск, I962. Вып.I. С.82-89.

3. А м и ш е в а Н.В. Комплексы кривых второго порядка в трехмерном эквиаффинном пространстве // Геометр. сб. / Томский ун-т. Томск, I972. Вып.9. С. I87-I97.

УДК 5I3.7; 5I7.5

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ГРАССМАНА НА КОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

М.П.Б у р л а к о в

(Чечено-Ингушский государственный университет)

Хорошо известна роль внешней алгебры Грассмана в геометрических исследованиях. Начиная с работ Э.Картана, эта алгебра составляет неотъемлемую часть аппарата современной геометрии. В последние десятилетия возрастает и роль алгебр Клиффорда как собственно в геометрии, так и в ее приложениях. Мы приведем определение внешних квадратичных алгебр, включающих как алгебры Грассмана, так и алгебры Клиффорда, а также ряд других